

MAI 1 - 5. a 6. cvičení

Limita funkce.

Opět, jako v příkladech pro minulá cvičení, je zde spíše „malá sbírka příkladů“, jako inspirace pro vás, o čem přemýšlet. A samozřejmě můžete „počítat“.

1. Užitím definice limity funkce ukažte:

a) $\lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x-2} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0$;
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sin x) = +\infty$.

2. Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3-x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}$;
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)$;

c) limita složené funkce (zde $\exp(x) = e^x$):

$\lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;
 $\lim_{x \rightarrow ?} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (za ? dosad'te takové body, ve kterých je limita „užitečná“); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

d) Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x)$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x$;

f) Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují (limita složené funkce):

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^x - 1)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^x - 1)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$.

g*) Definujme $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \ln(f(x)))$. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

3*. Z definice exponenciální funkce a funkce sinus jako součtu nekonečných řad

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ukážete, že

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty \text{ a pak } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{a} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

4. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $\arctg x$ (zavedení těchto funkcí viz soubor příkladů ke cvičení 5.):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x^2 - x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg x}{x^2 - x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctg x}{x^2 - x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow ?} \arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (? \text{ stejně jako v 2c))$$

5. Je dána funkce f předpisem :

$$\text{a) } f(x) = \frac{1 - \cos x}{|x|} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0 \quad . ;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{|x|} \quad , \quad \text{pokud } x \neq 0 \quad \text{a} \quad f(0) = 0 \quad .$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 \cdot \cos \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá.

6. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

$$\text{a) } f(x) = x \arctg \frac{1}{x} ; \quad \text{b) } f(x) = \frac{\ln(4x^2 + 1)}{x^2} ; \quad \text{c) } f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{d) } f(x) = \arctg \frac{1}{x} ; \quad \text{e) } f(x) = \frac{\arctg x}{x^2} .$$